

物理学 B 後期レポート モンティホール問題の検証

目的 モンティホール問題とは、アメリカで 1960 年代から放送されているゲームショー番組、「LET'S MAKE A DEAL」で出題された確立に関する問題の通称である。番組で司会を務めたモンティ・ホール氏が出題した問題で、数学界で大きな議論を呼んだ。問題は「出演者の前に 3 枚の扉があり、1 枚の扉の向こう側には新車、その他の 2 枚の扉の向こうにはヤギが置かれている。出演者は最初にどの扉を開けるか 1 枚選び、その後司会のホール氏は出演者が選ばなかった 2 枚の扉のうち外れの扉を 1 枚開けて見せる。その後出演者は扉を選びなおすことが許される」というものだった。1990 年に発行されたニュース雑誌のコラムで読者が投稿した「出演者は扉を選びなおすべきか」という質問に対してコラムニストのマリリン氏が「選びなおしたほうが当たる確率が二倍になる ($2/3$ になる)」と回答し、これに対して多くの数学者が「実際の確率は $1/2$ なのだから選びなおしても当たる確率は変わらない」と間違いを指摘する投書を行った。現在ではマリリン氏の答えが正しいことが証明されているが、多くの人が直感的には当たる確率が $1/2$ であると考えてしまう。私も実際その一人であり、しばらくの間なぜ当たる確率が $2/3$ となるのか理解することができなかった。そこで、実際に試行を繰り返して確率を計算することで答えを感覚的に理解しようと試みることにした。

原理 回答のしかたは、ホール氏が外れの扉を提示した後の行動によって「別の扉を選ぶ」と「選んだ扉を変えない」の 2 通りが考えられる。

「別の扉を選ぶ」場合、当たるための条件は「最初に選んだ扉が外れである」ことであるため、3 枚のうち 2 枚ある外れの扉のどちらかを最初に選べば最終的に当たりの扉を選ぶことになる。よって、当たる確率は $2/3$ となる。

「選んだ扉を変えない」場合、当たるための条件は「最初に選んだ扉が当たりである」ことであるため、3 枚のうち 1 枚ある当たりの扉を最初に選べばよい。よって、当たる確率は $1/3$ となる。

以上のことから、理論的には「別の扉を選ぶ」方が当たる確率が高く、またその確率は $2/3$ であることが確認できる。

これを実際の実験で検証するため、扉をカードに置き換える。またすべてのカードをそれぞれ別のカードと考えるために表面はすべて異なるものを用意し、カードの枚数 n が 4 以上の時は最終的な選択肢が 2 つになるように、提示する外れのカードの枚数を $n-2$ とする。そのほかの条件はモンティホール問題と同様にする。当たりのカードを選ぶ確率ははずれ提示後に「別のカードを選ぶ」場合と「選んだカードを変えない」場合のどちらにおいても最初に選んだカードによって決まるため、試行回

数を k 、当たりと定めたカードが出た回数を m として「 n 枚のカードから無作為に 1 枚選び、表面を確認する」という試行を行うとき、「別のカードを選ぶ」場合の当たる確率は $(k-m)/k$ 、「選んだカードを変えない」場合の当たる確率は m/k となる。

なお、理論上は、「別のカードを選ぶ」場合の当たる確率は $n=3$ で $2/3$ 、 $n=4$ で $3/4$ 、 $n=5$ で $4/5$ となる。

方法 裏面が同じで表面がすべて異なるカードを 3 枚用意し、1 枚を当たりと定めそのほかのカードをはずれ①、はずれ②と定める。裏向きにした状態で親にシャッフルしてもらい、私がその中から無作為に 1 枚選ぶ試行を 463 回繰り返した。同様の施行をカードの枚数を 4 枚にして 507 回、5 枚にして 500 回繰り返し、3 枚と 4 枚の場合はそれぞれのカードが何回出たか記録し、5 枚の場合は 1 回目から 500 回目までのカードが出たか順番に記録した。その後集計した結果をもとに、「外れ提示後に別のカードを選ぶ」という仮定のもとでそれぞれのカードを選ぶ確率を求めた。カードの枚数が 5 枚のものについては、加えてそれぞれの試行回についてその時点での当たる確率を求め、試行を何回繰り返すと確率が理論値に近づくのか調べた。

結果 カードの枚数を 3 枚、4 枚、5 枚にした時の当たりとはずれの出た回数と確率をそれぞれ表 1、表 2、表 3 に示す。また、カードの枚数を 5 枚にした時の当たりとはずれの出た順番と当たる確率を表 4 に示す。また、表 4 の確率と試行回数の関係を表したグラフを図 1 に示す。なお、表 4 では当たりを当、はずれ①を 1、はずれ②を 2、はずれ③を 3、はずれ④を 4 と表記した。

表 1、カードの枚数を 3 枚にした時のそれぞれのカードの出た回数と確率

	当たり	はずれ①	はずれ②
回数 (回)	158	161	144
確率 (%)	34.1	34.8	31.1

表 2、カードの枚数を 4 枚にした時のそれぞれのカードの出た回数と確率

	当たり	はずれ①	はずれ②	はずれ③
回数 (回)	127	121	120	139
確率 (%)	25.0	23.9	23.7	27.4

表 3、カードの枚数を 5 枚にした時のそれぞれのカードの出た回数と確率

	当たり	はずれ①	はずれ②	はずれ③	はずれ④
回数 (回)	110	107	93	99	91
確率 (%)	22	21.4	18.6	19.8	18.2

表 4、カードの枚数を 5 枚にした時のそれぞれのカードの出た順番と当たる確率

	当	当	3	3	当	1	1	3	2	4	回数
確率%	0	0	33.3	50	40	50	57.1	62.5	66.7	70	
	4	3	当	当	当	当	4	当	4	1	20
確率%	72.7	75	69.2	64.3	60	56.3	58.8	55.6	57.9	60	
	2	3	当	4	2	1	当	4	4	3	30
確率%	61.9	63.6	60.9	62.5	64	65.4	63	64.3	65.5	66.7	
	当	1	3	当	当	4	1	1	当	1	40
確率%	64.5	65.6	66.7	64.7	62.9	63.9	64.9	65.8	64.1	65	
	3	4	2	当	3	4	2	1	3	3	50
確率%	65.9	66.7	67.4	65.9	66.7	67.4	68.1	68.8	69.4	70	
	1	当	4	2	2	4	当	4	1	2	60
確率%	70.6	69.2	69.8	70.4	70.9	71.4	70.2	70.7	71.2	71.7	
	2	4	2	1	当	2	3	当	当	当	70
確率%	72.1	72.6	73	73.4	72.3	72.7	73.1	72.1	71	70	
	3	1	1	3	2	2	1	2	4	1	80
確率%	70.4	70.8	71.2	71.6	72	72.4	72.7	73.1	73.4	73.8	
	当	2	当	1	4	当	1	3	4	2	90
確率%	72.8	73.2	72.3	72.6	72.9	72.1	72.4	72.7	73	73.3	
	1	2	当	4	4	2	当	3	1	3	100
確率%	73.6	73.9	73.1	73.4	73.7	74	73.2	73.5	73.7	74	
	1	当	3	3	1	1	4	1	2	1	110

確率%	74.3	73.5	73.8	74	74.3	74.5	74.8	75	75.2	75.5	
	当	4	1	2	2	1	4	4	1	2	120
確率%	74.8	75	75.2	75.4	75.7	75.9	76.1	76.3	76.5	76.7	
	当	1	1	1	3	3	4	3	3	2	130
確率%	76	76.2	76.4	76.6	76.8	77	77.2	77.3	77.5	77.7	
	3	1	4	2	3	1	1	3	3	4	140
確率%	77.9	78	78.2	78.4	78.5	78.7	78.8	79	79.1	79.3	
	4	当	当	1	当	当	3	2	3	3	150
確率%	79.4	78.9	78.3	78.5	77.9	77.4	77.6	77.7	77.9	78	
	当	4	1	当	2	2	1	4	1	4	160
確率%	77.5	77.6	77.8	77.9	78.1	78.2	78.3	78.5	78.6	78.8	

											回数
	4	3	3	2	4	1	3	1	当	1	170
確率%	78.9	79	79.1	79.3	79.4	79.5	79.6	79.8	79.3	79.4	
	4	3	2	4	3	3	1	1	当	2	180
確率%	79.5	79.7	79.8	79.9	80	80.1	80.2	80.3	79.9	80	
	4	4	当	1	4	3	1	4	4	4	190
確率%	80.1	80.2	79.8	79.9	80	80.1	80.2	80.3	80.4	80.5	
	3	3	4	3	3	1	2	2	当	2	200
確率%	80.6	80.7	80.8	80.9	81	81.1	81.2	81.3	80.9	81	
	2	2	1	3	4	1	2	当	1	当	210
確率%	81.1	81.2	81.3	81.4	81.5	81.6	81.6	81.3	81.3	81	
	4	1	3	1	1	当	3	4	3	4	220

確率%	81	81	81.1	81.2	81.3	81.4	81.5	81.6	81.7	81.7	
	当	3	2	当	4	2	1	4	2	2	230
確率%	81.4	81.5	81.6	81.3	81.3	81.4	81.5	81.6	81.7	81.7	
	3	当	4	2	3	当	当	2	4	当	240
確率%	81.8	81.5	81.5	81.6	81.7	81.4	81	81.1	81.2	80.8	
	4	当	当	当	2	4	当	1	4	3	250
確率%	80.9	80.6	80.2	79.9	80	80.1	79.8	79.8	79.9	80	
	当	3	2	1	1	当	2	2	1	2	260
確率%	79.7	79.8	79.8	79.9	80	79.7	79.8	79.8	79.9	80	
	当	2	当	3	当	当	2	4	当	当	270
確率%	79.7	79.8	79.5	79.5	79.2	78.9	79	79.1	78.8	78.5	
	3	当	1	3	当	1	4	1	3	1	280
確率%	78.6	78.3	78.4	78.5	78.2	78.3	78.3	78.4	78.5	78.6	
	4	4	4	1	当	1	2	3	2	当	290
確率%	78.6	78.7	78.8	78.9	78.6	78.7	78.7	78.8	78.9	78.6	
	当	2	2	1	4	1	3	4	3	3	300
確率%	78.4	78.4	78.5	78.6	78.6	78.7	78.8	78.9	78.9	79	
	1	3	4	当	3	当	1	2	2	1	310
確率%	79.1	79.1	79.2	78.9	79	78.8	78.8	78.9	79	79	
	2	3	当	3	3	2	2	4	3	2	320
確率%	79.1	79.2	78.9	79	79	79.1	79.2	79.2	79.3	79.4	
	1	1	3	1	3	2	当	2	1	当	330
確率%	79.4	79.5	79.6	79.6	79.7	79.8	79.5	79.6	79.6	79.4	

	当	4	1	4	3	当	1	当	4	3	340
確率%	79.2	79.2	79.3	79.3	79.4	79.2	79.2	79	79.1	79.1	
	1	当	当	当	2	当	2	2	1	4	350
確率%	79.2	78.9	78.7	78.5	78.6	78.3	78.4	78.4	78.5	78.6	
	当	1	3	4	2	3	3	当	2	3	360
確率%	78.3	78.4	78.5	78.5	78.6	78.7	78.7	78.5	78.6	78.6	
	2	1	当	4	当	1	2	4	当	当	370
確率%	78.7	78.7	78.5	78.6	78.4	78.4	78.5	78.5	78.3	78.1	
	当	1	1	1	2	4	当	4	3	3	380
確率%	77.9	78	78	78.1	78.1	78.2	78	78	78.1	78.2	
	2	当	4	2	1	1	4	2	4	1	390
確率%	78.2	78	78.1	78.1	78.2	78.2	78.3	78.4	78.4	78.5	
	3	1	3	2	3	4	4	4	4	2	400
確率%	78.5	78.6	78.6	78.7	78.7	78.8	78.8	78.9	78.9	79	
	3	当	4	1	3	1	4	当	2	3	410
確率%	79.1	78.9	78.9	79	79	79.1	79.1	78.9	79	79	
	2	2	4	2	当	当	2	2	1	2	420
確率%	79.1	79.1	79.2	79.2	79	78.8	78.9	78.9	79	79	
	2	当	1	3	3	当	3	3	当	2	430
確率%	79.1	78.9	79	79	79.1	78.9	78.9	79	78.8	78.8	
	2	3	3	3	2	1	3	1	1	当	440
確率%	78.9	78.9	79	79	79.1	79.1	79.2	79.2	79.3	79.1	
	4	3	4	1	当	3	1	2	当	2	450

確率%	79.1	79.2	79.2	79.3	79.1	79.1	79.2	79.2	79.1	79.1	
	当	2	3	3	当	4	当	当	当	1	460
確率%	78.9	79	79	79.1	78.9	78.9	78.8	78.6	78.4	78.5	
	4	4	3	当	当	1	1	1	4	当	470
確率%	78.5	78.6	78.6	78.4	78.3	78.3	78.4	78.4	78.5	78.3	
	2	4	1	3	3	2	2	1	3	4	480
確率%	78.3	78.4	78.4	78.5	78.5	78.6	78.6	78.7	78.7	78.8	
	2	3	2	当	1	当	3	1	4	4	490
確率%	78.8	78.8	78.9	78.7	78.8	78.6	78.6	78.7	78.7	78.8	
	1	1	当	4	当	当	1	1	当	3	500
確率%	78.8	78.9	78.7	78.7	78.6	78.4	78.5	78.5	78.4	78.4	

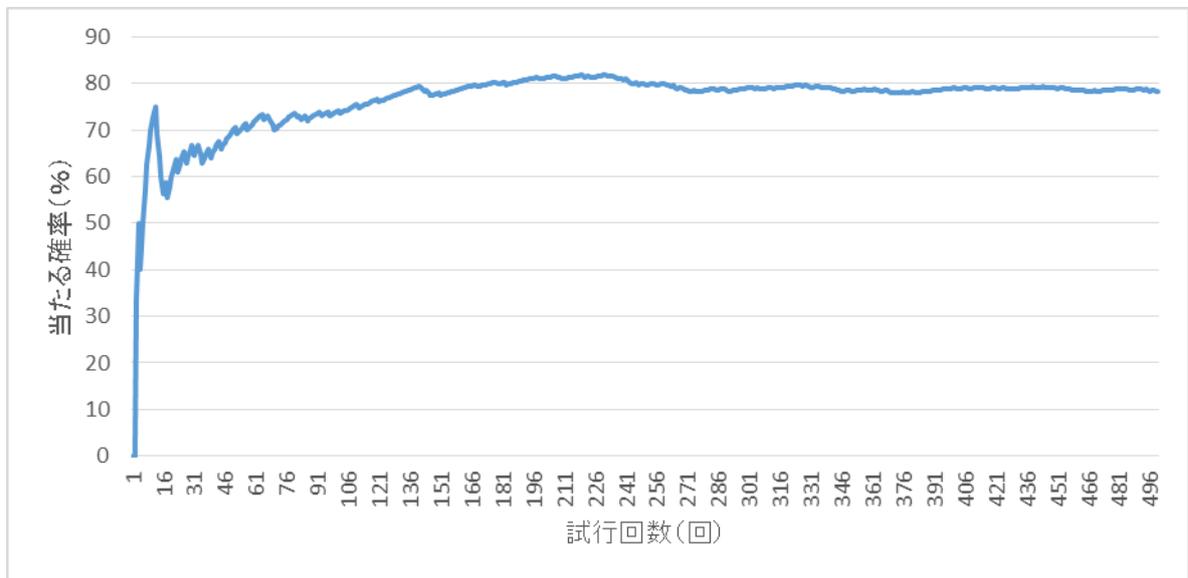


図1、カードの枚数が5枚のときの試行回数と当たる確率の推移

考察 当たりのカードの得点を0、外れのカードの得点を1とすると、 $n=3$ のとき平均値は0.659、分散は104.082、標準偏差は10.202、標準不確かさは0.474である。実測値が0.659、理論値が0.667であるから、そのずれは0.008となる。

n=4 のとき平均値は 0.75、分散は 95.188、標準偏差は 9.756、標準不確かさは 0.433 である。実測値が 0.75、理論値も 0.75 であるから、ずれはない。

n=5 のとき平均値は 0.78、分散は 85.8、標準偏差は 9.263、標準不確かさは 0.414 である。実測値が 0.78、理論値は 0.8 であるから、ずれは 0.02 となる。

以上の実験から、カードの枚数が 3 枚のときは当たる確率が 65.9%、4 枚のときは 75%、5 枚のときは 78% という結果が得られ、実際の実験で理論値に近い数値が出ることを確認された。また、カードの枚数を 5 枚にした実験からは 130 回目ごろから理論値である 80% に近づき、それ以降は 80% 付近で数値が推移することが確認された。時間が許せば、n=5 の実験を n=3 と n=4 についても行い、実測値が理論値に近づくために必要な試行数を調べたいと思った。